**Різні способи доведення теореми Піфагора**

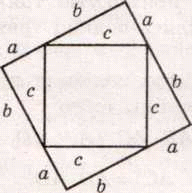
Теорема Піфагора — одна з найважливіших і. найвідоміших теорем евклідової геометрії. Ві­домо більше сотні її різних доведень.

**Класичне формулювання теореми Піфагора**:

***Якщо сторони прямокутного трикутника є сторонами квадратів, то площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах***

1. **Геометричне доведення**

***Доведення*** Нехай трикутник *ABC* — прямокутний із катетами *а, Ь* і гіпотенузою с. Розглянемо квадрат зі стороною *с* і на кожній стороні побудуємо заданий трикутник.



Утвориться квадрат зі стороною *а + b.* Знайдемо його площу двома способами:

*S = (a + b)2 і S=2ab + c2*

*У результаті матимемо:(a + b)2 =2 aв + c2,*

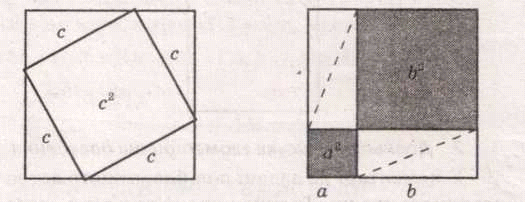
*а2+2ав +в2 = 2ав + с2,*

*а2+в2 =с2.*

**Продемонструємо інші міркування**

Оскільки квадрати відрізків *а, Ь, с* до­рівнюють площам квадратів з такими самими сторонами, то теорему Піфагора часто форму­люють і так: **площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його ка­тетах**.

Побудуємо два квадрати, сторони яких до­рівнюють *а + Ь.*



Очевидно, що площі цих квадратів рівні.

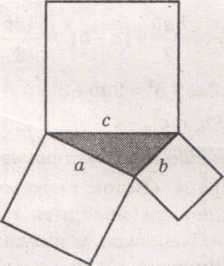
У першому квадраті виділимо квадрат. Побудований на гіпотенузі (дістанемо квадрат і чотири рівні прямокутні трикутники).

У другому квадраті виділимо квадрати, побудовані на катетах (дістанемо два квадрати і чотири рівні прямокутні трикутники).

Не враховуючи площі трикутників, матимемо, що ***с2 = а2 + в2*** .

Бачимо, що площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах трикутника.

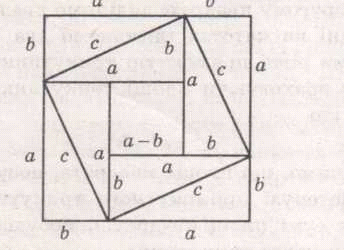
Розглянемо рисунок.



Така ілюстрація до теореми здається подібною до штанів, тому і маємо жартівливі примовки: «Піфагорові штанці рівні є в три кінці», «Пифагоровы штаны на все стороны равны». Якщо цей рисунок повернути , то вбачатимемо не штани, а сорочку, тому примовляють: «Хто в сорочці Піфагора – піднімає руки вгору».

1. ***Давнокитайське доведення***

У коментарі до задачі з найдавнішого астро­номічного твору «Трактат про мірну віху» є по­силання на креслення, де квадрат, побудований на сумі катетів *а* і *b* прямокутного трикутни­ка, подано як суму площ інших фігур.



***Доведення.***

Маємо:

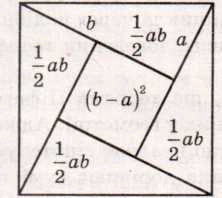
*(а + в )2 = + (а – в)2 = + с2*

*Тому a2 + 2ab + b2 =2аЬ + с2.*

*Отже, а2+в2=с2*

1. ***Давньоіндійське геометричне доведення***

У своїй праці «Вінок систем» індійський математик Бхаскара наводить приклад дове­дення теореми Піфагора у вигляді креслення з підписом «Дивись!». Використаємо креслення Бхаскари для доведення теореми.

1. 

Доведення

Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі *с* трикутника, дорівнює сумі площ чотирьох прямокутних трикутників і квадрата, довжина сторони якого — (*а-b*). Тобто

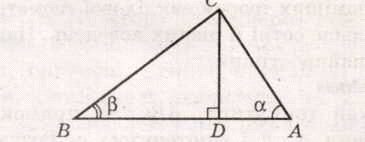
с2 = *+* (а - Ь)2 = *2*ab *+* а2 - *2*ab + Ь2 = а2 +Ь2*.*

Отже, а2+Ь2 = с2.

1. **Інші способи доведення теореми**

1). Доведемо теорему Піфагора, використовуючи ***властивість подібних*** ***трикутників.***

Доведення



У трикутнику *ABC (<C =* 90°), *<A=a, <B =* β. Проведемо *CD* перпендикулярно *AВ.* Отримаємо два прямокутні трикутники *ВСD* і *ACD.* Утворились подібні трикутники *ABC* і *ACD.*

За властивістю подібних трикутників їх сторони пропорційні, тобто

АВ: АС = АС: AD,

AC2 = AB \* AD. *(1)*

Трикутники *ABC* і *CBD* мають рівні кути, вони подібні. Сторони цих трикутників пропорційні, тобто:

АВ: СВ = СВ: DB,

CB2 = AB \* DB. *(2)*

Додамо почленно рівності (1) і (2):

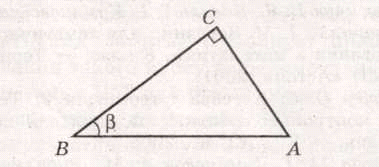
AC2 *+ СВ2 = AB \* AD* + *AB \* DB,*

*AC2 +CB2 =AB(AD + DB),*

*AC2 + CB2 = AB \*AB,*

*AC2 +CB2 = AB2,* що й потрібно було довести.

2). Доведемо теорему Піфагора, використовую­чи ***основну* *тригонометричну******тотожність.***



Доведення

У трикутнику *ABC <C* = 90°, *АС* та *ВС* — катети, *АВ* — гіпотенуза. Відомо, що: ,

Звідки маємо:

AC = АВ sin β, *ВС=АВ*cos β.

В обох рівностях піднесемо обидві частини до квадрата, отримаємо:

*АС2 = АВ2* sin2 β,

*ВС2 = АВ2* cos2 β.

Додамо почленно ці рівності:

*АС2* + *ВС2 = АВ2* sin2 β + *АВ2* cos2 β,

*АС2 + ВС2* = *АВ2* (sin2 β + cos2 β).

Використовуючи основну тригонометричну тотожність sin2 а + cos2 а = 1, маємо:

*АС2 + ВС2 = АВ2.*

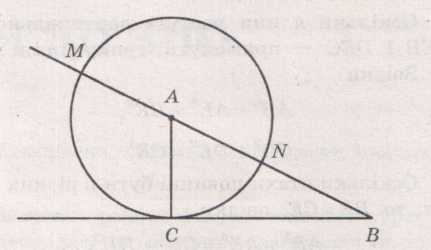
3). Доведемо теорему Піфагора, використовую­чи ***властивість січної та*** ***дотичної, проведених до кола з однієї точки.***

Доведення

Маємо: трикутник *ABC* (<C = 90°). Дове­демо, що

*АВ2* = *AC2 + ВС2.*

Побудуємо коло з центром у точці А і ра­діусом АС, воно перетне гіпотенузу *АВ* у точ­ці *N,* а її продовження – в точці М.



Оскільки катет АС перпендикулярний СВ, де АС – радіус, то СВ – дотична до кола; АВ – січна.

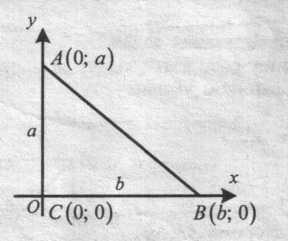
За властивістю січної та дотичної, проведеної до кола з однієї точки, маємо: CB2 = = BN\* BM = ( AB – AN) ( AB + AM)

Оскільки AN = AM = AC, то CB2= (AB –AC) (AB +AC) =AB2 - АC2 .

Звідки AB2 = AC2 + BC2 , що й треба було довести.

***4). Доведення теореми методом координат***

Введемо систему координат: катети трикутника лежать на осях, початок координат у вершині прямого кута.



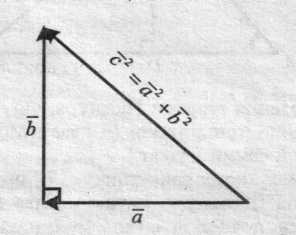
Тоді А(0; a), В(b;0); С(0;0).

Знайдемо відстані АВ, АС, ВС, використовуючи формулу для обчислення відстані між точками: d2 = (х1- х2)2 + (у1 – у2)2, де d – відстань між точками А(х1; у1) і В(х2; у2) . АВ2 = (0 –b)2 + (а- 0)2 = b2 + а2, АС2 = (0 –0)2 + (а- 0)2 = а2, ВС2 = (b –0)2 + (0- 0)2 = b2. Звідси, АВ2 = АС2 + ВС2.

5). ***Доведення векторним методом***.

Нехай ‾a(ax; ay), ‾b(bx; by), ‾c( ax + bx ; ay + by),

Тобто ‾c = ‾a + ‾b.



‾a b‾ = ax bx + ay by . Оскільки вектори ‾a і b‾ перпендикулярні, то ‾a b‾ = 0.

‾a2 = a2х + a2у, ‾b2 =b2х +b2у , ‾c2 =( ax + bx )2 + (ay + by)2 .

‾c2 = a2х +2 ax bx+ b2х + a2у + 2 aу bу+ b2у =

= ( a2х + a2у) + (b2х + b2у) + 2(ax bx + aу bу) = ‾a2 + ‾b2 +2‾a ‾b =‾a2 + ‾b2 +0 .

Отже, ‾c2 =‾a2 + ‾b2.

***5. Наочне ілюстрування теореми Піфагора – зважування***.

Якщо вирізати з картону три квадрати , сторони яких дорівнюють сторонам даного трикутника, і покласти два менших квадрати на одну шальку досить чутливих терезів. А на другу шальку – третій, то терези будуть у рівновазі.